МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное образовательное учреждение
высшего образования Московской области
«Государственный гуманитарно-технологический университет»
Промышленно-экономический колледж

Тема урока:

Элементы математической логики.

Операции над высказываниями.

Автор: Савинова Лариса Николаевна,
преподаватель математических дисциплин

Цели и задачи урока:

- ввести основные понятия математической логики;
- рассмотреть понятие высказывания, научиться устанавливать его истинность-ложность;
- изучить основные логические операции над высказываниями;
- научиться составлять сложные высказывания и исследовать их на истинность;
- научиться составлять таблицы истинности для высказываний и для формул;
- содействовать развитию математического мышления обучающихся и побуждать их к преодолению трудностей в процессе умственной деятельности;
- развивать культуру устной математической речи, чувство самоконтроля.

«Я знаю только то, что я ничего не знаю,
другие не знают и этого»
Сократ

Сегодня мы познакомимся с элементами математической логики. В ее основе лежит **логика высказываний, в которой высказывание рассматривается как особое буквенное исчисление — *алгебра логики***. **Математическая логика** изучает схемы (формы) истинных высказываний, имеющих наибольшую степень общности, схемы математических доказательств и правила их вывода. Изучение исчисления высказываний как алгебраической системы составляет предмет алгебры логики, или булевой алгебры. Мы освоим язык алгебры логики, ее законы, научимся строить и упрощать булевы функции, выполнять операции над сложными высказываниями, а также узнаем, как язык алгебры логики применяется в процессе рассуждений.

1. Основные понятия математической логики

1. ***Понятие*** — это форма мышления, отражающая предметы в их существенных общих признаках. Каждый из признаков необходим для описания некоторого понятия, а все вместе они достаточны для того, чтобы с их помощью отличить данное понятие от других из общего множества однородных объектов.

Под **признаком** обычно понимают свойства и отношения реальных вещей, выраженные в этом понятии. Отношение между понятиями называют **предикатами**.

Логические приемы формирования понятий.

1) Анализ — мысленное расчленение объектов (явлений, процессов) на их составные части, выделение в них признаков.
2) Синтез — соединение частей или признаков в единое целое.
3) Сравнение — установление сходства или различия объектов по существенным или несущественным признакам.
4) Абстрагирование — выделение одних признаков и отвлечение от других (чаще всего — выделение существенных и отказ от несущественных признаков).
5) Обобщение — объединение однородных объектов в класс.

Логические характеристики понятий.

Любое понятие имеет логическую структуру, включающую в себя объем и содержание — основные логические характеристики понятия.

Содержание понятия характеризует совокупность существенных признаков предмета, отраженных в понятии. Например, содержание понятия «**молекула**» составляет ее основной отличительный признак — быть мельчайшей частицей вещества, отражающей его физические и химические свойства.

Содержание понятия «**квадрат**» составляют его отличительные признаки: «быть прямоугольником и иметь равные стороны», либо «быть ромбом и иметь прямые углы».

Объем понятия есть множество всех предметов, которые мыслятся в данном понятии.

Объем понятия «**столицы государств**» определяется перечислением всех столиц: Москва, Париж, Лондон, Пекин и т.д.

Объем понятия «**стороны горизонта**» составляют восток, запад, север и юг.

2. **Суждение** — это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о *существовании* предмета, *связях* между предметом и его свойствами или об *отношениях* между предметами.

Словам естественного языка, например русского, в логике соответствуют понятия. Слова объединяются в предложения. По интонации предложения делятся на вопросительные, восклицательные и повествовательные. Но **информацию несут только повествовательные предложения. Таким предложениям в логике соответствуют суждения**. Они выражают наши знания о связях между понятиями. Суждение характеризуют две стороны: его форма и его истинность.

3) **Высказывание** — первый важнейший объект изучения математической логики**. Всякое суждение, утверждающее что-либо о чем-либо, называют *высказыванием*, если можно сказать, истинно оно или ложно в данных условиях места и времени.** Высказывание не может быть одновременно и истинным, и ложным. Характеристика суждения по признаку истинности-ложности называется семантической.

Рассмотрим **примеры повествовательных предложений**.

1. Умение грамотно использовать логические операции повышает эффективность программирования.
2. История логики насчитывает около двух с половиной тысячелетий.
3. Знание математической логики необходимо любому специалисту.
4. Математическая логика — увлекательная наука.
5. x> 5.
6. Была метель.
7. Он — программист.

Предложения 1, 2, 3 являются высказываниями, а 4 и 5 — нет. Почему???

Разумеется, далеко не все предложения являются высказываниями. К таковым, в частности относятся вопросительные и побудительные предложения:

Вы не подскажете, как пройти в библиотеку?

Пойдём в баню!

Завтра Петя сдаст экзамен

Здесь случаи неопределённости либо неполной информации.

***n*>5** – а тут мы не знаем, чему равно «эн», поэтому это тоже не высказывание. Однако последнее предложение можно доопределить до высказывания, а точнее, до высказывательной формы, указав дополнительную информацию об «эн» с помощью кванторов. Их два:

∀ – квантор общности (перевёрнутая буква А – от англ. All) понимается и читается как «для всех», «для любого (ой) (ых) »;

∃ – квантор существования (развёрнутая буква Е – от англ. Exist) понимается и читается как «существует».

Примеры:

1) $(\forall n \epsilon N)(n > 2)$ – для любого натурального числа выполнено неравенство *n*>2. Данная высказывательная форма ложна, поскольку ей, очевидно, не соответствуют натуральные числа $n=1$, $n=2$.
2) $(\forall n \epsilon N)(n \geq 1)$ – это высказывательная форма уже истинна.
3) $(\exists n \epsilon N)(n > 2)$ – истина, существует натуральное число, большее 2.
4) $(\exists n \epsilon N)(n < 0)$ – ложь.
5) $(\forall \vec{a})\left(\exists(\overrightarrow{-a})\right)$ – для любого вектора существует противоположный ему вектор. Прописная *истина*, а точнее, аксиома векторного пространства.

Высказывания обозначают начальными заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, D … или теми же буквами с индексами внизу.

Приведем примеры высказываний:

A1: «Москва — столица России»;

A2: «Саратов находится на берегу Невы»;

A3: «Все люди смертны»;

A4: «Сократ — человек»;

A5: «7 < 4»;

A6: «Волга впадает в Каспийское море»;

A7: «А.С. Пушкин — великий русский математик»;

A8: «Снег белый».

Обозначив истинное высказывание символом 1, а ложное — 0, введем функцию λ, заданную на совокупности всех высказываний и принимающую значения в двухэлементном множестве {0, 1}, по следующему правилу:

$$\lambda(P) = \begin{cases} 1, & \text{если высказывание } P \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если высказывание } P \text{ ложно.} \end{cases}$$

Функция λ называется **функцией истинности**, а значение λ(P) — логическим значением или значением истинности высказывания P.

Для приведенных высказываний имеем логические значения: $\lambda(A_1) = 1$, $\lambda(A_2) = 0$, $\lambda(A_3) = 1$, $\lambda(A_4) = 1$, $\lambda(A_5) = 0$, $\lambda(A_6) = 1$, $\lambda(A_7) = 0$, $\lambda(A_8) = 1$.

Отметим, что имеются следующие обозначения для истинных высказываний: 1, И, t (от англ. true — истинный) и для ложных высказываний: 0, Л, f (от англ. false — ложный). Мы будем использовать 1 и 0.

2. Сложные высказывания, операции над ними

Сложные предложения в русском языке образуются из простых путем **связок** (*и*, *а*, *если… то*, *либо*, *или*, *тогда и только тогда, когда* и т.д.). Назовем такие и аналогичные им союзы логическими связками. Новые предложения появляются также с употреблением частицы *не* или слов *неверно, что*. Эти слова также будем называть логическими связками.

Сложные высказывания в логике образуются из элементарных с помощью операций над высказываниями или логических связок.

Истинность или ложность сложного суждения являются функциями простых суждений, входящих в его состав. Зная истинность простых суждений, можно установить истинность сложных суждений.

Утвердительные предложения, **не содержащие** / **содержащие** логические связки, называют **элементарными** / **составными** высказываниями.

Например, 1) предложение «Все программисты имеют высшее или среднее специальное образование» состоит из двух элементарных предложений: «Все программисты имеют высшее специальное образование» и «Все программисты имеют среднее специальное образование». Соединены предложения связкой ***или***.

2) Предложение «Если программист не имеет специального образования, то он не будет конкурентоспособен на рынке труда» состоит из простых предложений, соединенных связками ***если… то*** и отрицаний ***не***.

3) Сложное суждение может быть представлено простым предложением. Например: «Дискретная математика включает разделы: «Элементы теории множеств», «Элементы теории графов», «Элементы классической и математической логики», «Элементы теории автоматов».

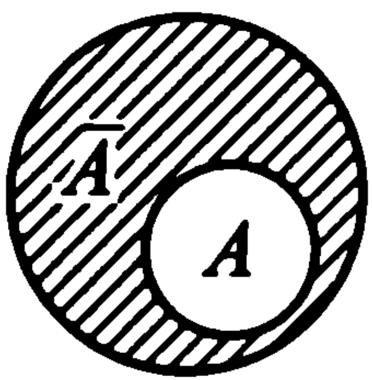
Это сложное суждение хотя и представлено простым предложением, но содержит пять простых суждений.

Основными логическими операциями являются: отрицание (не), дизъюнкция (строгая (либо) и нестрогая (или)), конъюнкция (и), импликация (если… то), эквиваленция (тогда и только тогда).

1) Отрицание высказывания

Отрицанием (или инверсией) высказывания *A* называется новое высказывание, обозначаемое $\overline{A}$ или $\neg A$ (читается: *«не А» или «не верно, что А»*), которое истинно, если высказывание *A* ложно, и ложно, если высказывание *A* истинно.

Другими словами, логическое значение высказывания $\neg A$ связано с логическим значением высказывания *A*, как указано в таблице, называемой таблицей истинности операции отрицания:



λ(A)	λ(¬A)
0	1
1	0

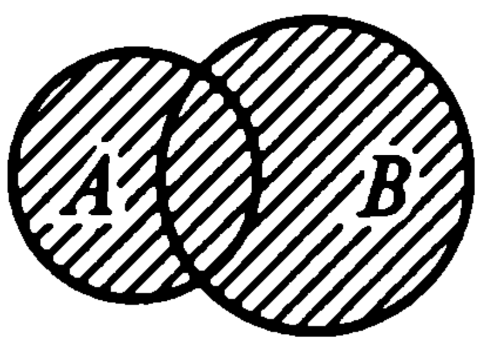
Пример. Применим операцию отрицания к высказыванию А6: «Волга впадает в Каспийское море». Данное отрицание можно читать так: «Неверно, что А6» т.е. «Неверно, что Волга впадает в Каспийское море». Или же частицу «не» переносят на такое место (чаще всего ставят перед сказуемым), чтобы получилось правильно составленное предложение: «Волга не впадает в Каспийское море». Таблица из определения дает для данного высказывания следующее логическое значение: $\lambda(\neg A_6) = \neg\lambda(A_6) = \neg 1 = 0$

т. е. высказывание **¬А6** ложно. Ложность высказывания **¬А6** обусловлена только истинностью исходного высказывания А6 и определением 1), но никак не соображениями смысла (содержания) высказывания **¬А6**.

2) Дизъюнкция (логическое сложение)

Дизъюнкцией (нестрогой или соединительной) высказываний *A* и *B* называется новое высказывание *A* ∨ *B* (читается: *«A или B»*, *«или A или B, или оба вместе»*), которое истинно тогда и только тогда, когда истинно *хотя бы одно из этих высказываний*, и ложно в единственном случае, когда оба высказывания A и B ложны.

Другими словами, *A* ∨ *B* такое высказывание, логическое значение которого связано с логическими значениями исходных высказываний *A* и *B* так, как указано в таблице истинности операции дизъюнкции:



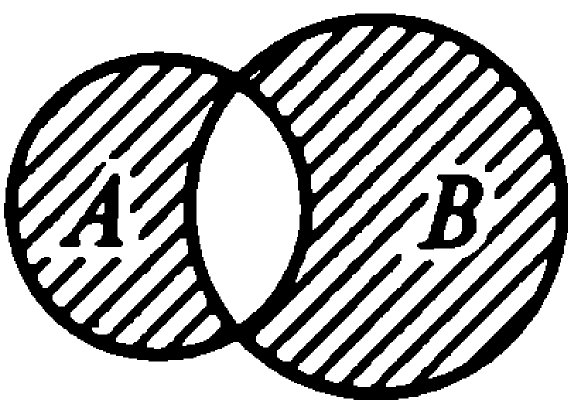
λ(A)	λ(B)	λ(*A* ∨ *B*)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2) Дизъюнкция двух высказываний

(от лат. dusjunctio — разъединение)

Строгой дизъюнкцией (разделительной) высказываний A и B называется высказывание $A \veebar B$ (читается *«либо А, либо В»; «или А, или В, но не оба вместе»*), которое истинно тогда и только тогда, когда истинно *только одно из этих высказываний.*

Другими словами, $A \veebar B$ такое высказывание, логическое значение которого связано с логическими значениями исходных высказываний A и B так, как указано в таблице истинности операции дизъюнкции:



λ(A)	λ(B)	$\lambda(A \veebar B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Примеры.

1) Студент сдаёт экзамен, если ответит **хотя бы на один** вопрос в билете из двух.

2) Применим операцию дизъюнкцию к высказываниям A3 и A5. Получим составное высказывание A3 v A5: «Все люди смертны, или 7 < 4». Несмотря на первоначально кажущуюся странность этого высказывания, нет сомнений в его истинности. К аналогичному заключению приводит также формальное вычисление логического значения данного высказывания по таблице, исходя из логических значений высказываний A3 и A5:

$$\lambda(A3 \vee A5) = \lambda\,(A3) \vee \lambda(A5) = 1 \vee 0 = 1.$$

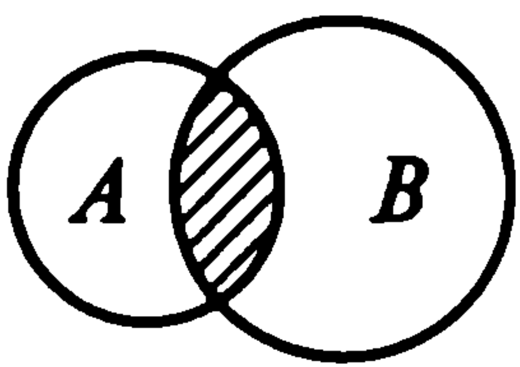
3)Дизъюнкцией высказываний A2 и A7 будет высказывание «Саратов находится на берегу Невы, или А. С. Пушкин — великий русский математик», являющееся ложным, что полностью согласуется с вычислением по таблице: $\lambda(A2 \vee A7) = \lambda\,(A2) \vee \lambda(A7) = 0 \vee 0 = 0$.

3) Конъюнкция (логическое умножение)

(происходит от лат. conjunctio — соединение)

Конъюнкцией высказываний *A* и *B* называется высказывание *AB* (*A* ∧ *B*, *A&B*) (читается *«A и B»; «как A, так и B»; «не только A, но и B», «A вместе с B»*), которое истинно тогда и только тогда, когда истинны *оба высказывания* и ложно во всех остальных случаях

Другими словами, *AB* такое высказывание, логическое значение которого связано с логическими значениями исходных высказываний *A* и *B* так, как указано в таблице истинности операции конъюнкции:



λ(A)	λ(B)	λ (*AB*)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Примеры.

1) Петя получает допуск к экзамену по математике, если сдаёт практические работы и зачёт по теме.

2)Применим операцию конъюнкции к высказываниям A_2 и A_3. Получим высказывание $A_2 \wedge A_3$: «Саратов находится на берегу Невы, и все люди смертны». Конечно, мы не воспринимаем это высказывание как истинное из-за первой, ложной, его части. К выводу о ложности полученного высказывания также придем, исходя из логических значений исходных высказываний A_2 и A_3 и определения конъюнкции на основании приведенной таблицы.

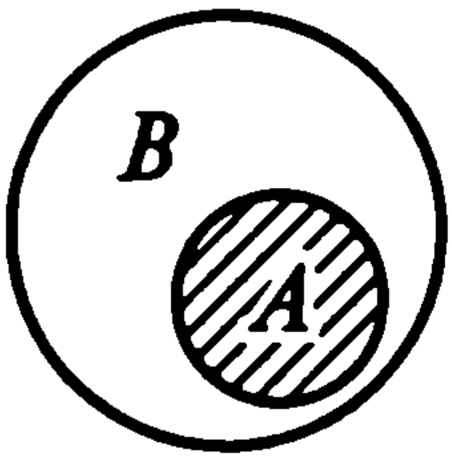
В самом деле, $\lambda(A_2 \wedge A_3) = \lambda(A_2) \wedge \lambda(A_3) = 0 \wedge 1 = 0$.

4) Импликация (следование)

(от лат. implicatio — сплетение и implico — тесно связываю)

Импликацией двух высказываний A и B называется высказывание $A \to B$ (читается: ***«если A, то B»***, *или «из A следует B», или «A влечет B», или «A достаточно для B», или «B необходимо для A»),* которое ложно в единственном случае, когда высказывание A истинно, а B — ложно, т.е. *из истины следует ложь,* а во всех остальных случаях — истинно.

В высказывании $A \to B$ высказывание A называется посылкой или антецедентом, а высказывание B — следствием или консеквентом.



λ(A)	λ(B)	λ (A→B)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Примеры.

1) Высказывание $A6 \to A5$: «Если Волга впадает в Каспийское море, то 7 < 4» ложно, так как

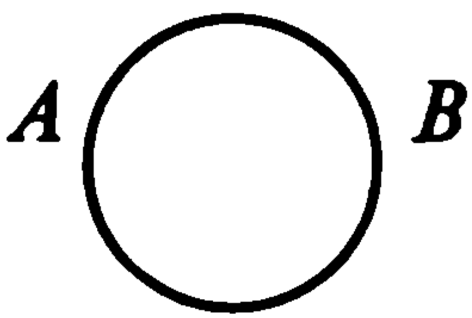
$$\lambda(A6 \to A5) = \lambda(A6) \to \lambda(A5) = 1 \to 0 = 0.$$

2) Высказывание «Если Саратов находится на берегу Невы, то А.С. Пушкин — великий русский математик», являющееся импликацией высказываний $A2$ и $A7$, истинно, так

$$\lambda(A_2 \to A_7) = \lambda(A_2) \to \lambda(A_7) = 0 \to 0 = 1.$$

5) Эквиваленция (эквивалентность)

Эквиваленцией высказываний *A* и *B* называется высказывание $A \leftrightarrow B$ ($A \equiv B$, $A \sim B$) (читается: *«A эквивалентно B», или* ***«A тогда и только тогда, когда B»****, или «A необходимо и достаточно для B», или «A, если и только если B»*), которое истинно тогда и только тогда, когда либо истинны, либо ложны одновременно *оба высказывания*, а во всех остальных случаях — ложно.



λ(A)	λ(B)	λ (A↔B)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Примеры.

1) Высказывание «7 < 4 тогда и только тогда, когда снег белый», являющееся эквивалентностью высказываний А5 и А8, ложно, так как

$$\lambda(A_5 \leftrightarrow A_8) = \lambda(A_5) \leftrightarrow \lambda(A_8) = 0 \leftrightarrow 1 = 0.$$

2) Напротив, высказывание «Саратов находится на берегу Невы, если и только если А. С. Пушкин — великий русский математик» истинно, так как оно является эквивалентностью двух ложных высказываний.

Пример на все операции.

Для простых высказываний

A: *«Максимов — хороший программист»*

B: *«Он побеждает на олимпиадах»*

составить сложные высказывания.

Ответ:

А: *«Максимов — хороший программист»*

В: *«Он побеждает на олимпиадах»*

Конъюнкция АВ:

*«Максимов — хороший программист, **и** он побеждает на олимпиадах»*

или

«Максимов — хороший программист, он побеждает на олимпиадах».

Ответ:

A: *«Максимов — хороший программист»*

B: *«Он побеждает на олимпиадах»*

Нестрогая дизъюнкция A v B:

*«**Или** Максимов хороший программист, **или** побеждает на олимпиадах».*

Строгая дизъюнкция A ⩡ B :

*«**Либо** Максимов хороший программист, **либо** побеждает на олимпиадах».*

Ответ:

A: *«Максимов — хороший программист»*

B: *«Он побеждает на олимпиадах»*

Импликация A → B:

*«**Если** Максимов хороший программист, **то** он побеждает на олимпиадах»;*

*«Максимов — хороший программист, **только если** побеждает на олимпиадах»*

*«**Для** того чтобы Максимов побеждал на олимпиадах, **достаточно**, чтобы он был хорошим программистом».*

Ответ:

A: *«Максимов — хороший программист»*

B: *«Он побеждает на олимпиадах»*

Эквиваленция A ↔ B:

*«Максимов хороший программист **тогда и только тогда, когда** он побеждает на олимпиадах».*

*«Максимов хороший программист, **если и только если** (**только когда**) он побеждает на олимпиадах».*

3. Составление таблиц истинности

Пример 1. Составить таблицу истинности для формулы

$$(X \to Y) \vee (Y \to X).$$

Руководствуемся при этом определениями логических операций импликации и дизъюнкции.

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda\,(X \to Y)$	$\lambda\,(Y \to X)$	$\lambda\,(X \to Y) \vee (Y \to X)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

3. Составление таблиц истинности

Пример 1. Составить таблицу истинности для формулы

$$(X \to Y) \vee (Y \to X).$$

В результате получим таблицу:

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda\,(X \to Y)$	$\lambda\,(Y \to X)$	$\lambda\,(X \to Y) \vee (Y \to X)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Пример 2. Поможем синоптикам определить прогноз погоды. Известно, что если атмосферное давление понижается, то возможен дождь. В настоящее время атмосферное давление понижается. Возможен ли дождь?

Решение. Формализуем условия задачи, введя обозначения. Пусть X — атмосферное давление понижается; Y — возможен дождь.

Высказывание «Если давление понижается, то возможен дождь» имеет вид: $\underline{X \to Y}$. Тогда «Если давление понижается, то возможен дождь. Давление понижается» можно записать в виде конъюнкции $(X \to Y) \cdot X$. Сформулируем теорему: $((X \to Y) \cdot X) \to Y = 1.$

Докажем истинность вывода, используя оба способа.

Синтактический способ. $((X \to Y)X) \to Y = ((\overline{X} \vee Y) \cdot X) \to Y = (Y \cdot X) \to Y = \overline{X \cdot Y} \vee Y = \overline{X} \vee \overline{Y} \vee Y = \overline{X} \vee 1 = 1.$

Семантический способ представим в таблице.

X	Y	$X \to Y$	$(X \to Y)X$	$((X \to Y)X) \to Y$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Из таблицы видно, что теорема истинна при любом наборе значений *X* и *Y*. Таким образом, доказана справедливость утверждения «Возможен дождь». Получение тождественной единицы подтверждает справедливость доказываемой теоремы.

Пример 3. Составить таблицу истинности импликации для высказываний:

А: «Выполнил домашнее задание»

В: «Получил пятерку»

A	B	A→ B	Примеры
1	1	1	«Если задание выполнил (1), то пятерку получил (1)» — вывод A→ B истинный
1	0	0	«Задание выполнил (1), а пятерку не получил (0)» — вывод A→ B ложный
0	1	1	«Задание не выполнил (0), но пятерку получил (1)» — вывод A→ B истинный (1), так как пятерку поставили, например, за другой вид работы на уроке
0	0	1	«Если задание не выполнил (0), то пятерку не получил (0)» — вывод A→ B истинный

Пример 4. Составить таблицу истинности импликации для высказываний:

A: «Через проводник пустили ток»

B: «Длина проводника увеличилась»

A	B	$A \to B$	Примеры
1	1	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	0	1	

Пример 5. Составить таблицу истинности импликации для высказываний:

A: «Некоторый поезд прибывает на станцию»

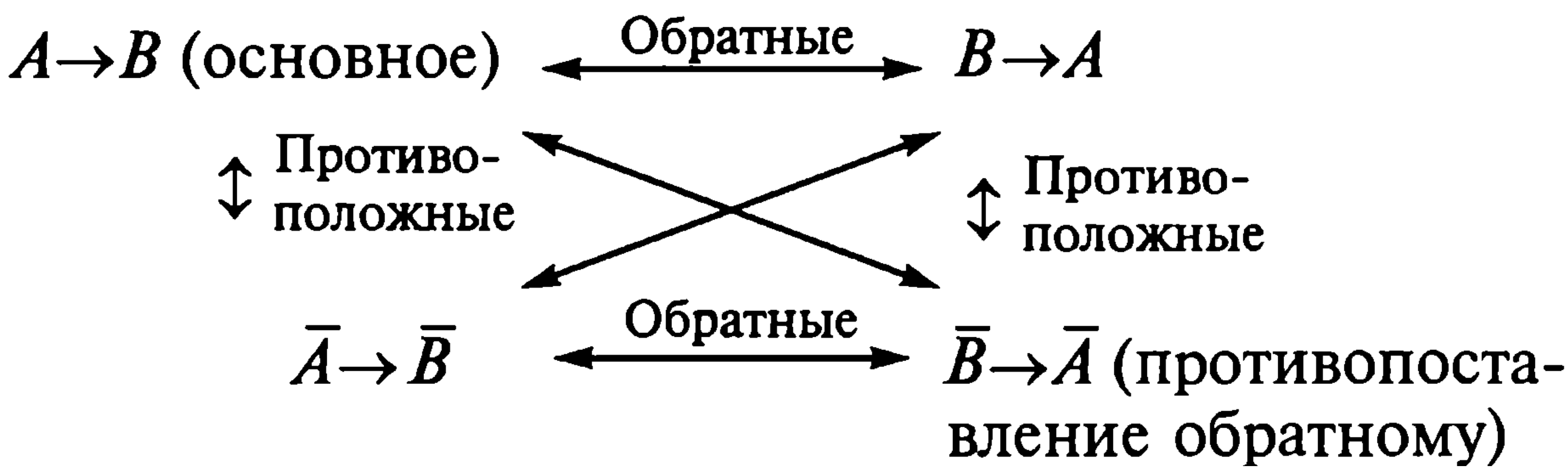
B: «Подается сигнал “Путь закрыт”»

Поезд А	Сигнал В	
	Путь закрыт (В=1)	Путь открыт (В=0)
Прибывает (А=1)	1	0
Не прибывает (А=0)	1	1

Импликация ложна только в одном случае: (каком?)

Назовем $B \to A$ **обратным высказыванием** для высказывания $A \to B$, а высказывание $\overline{A} \to \overline{B}$ — **противоположным** к импликации $A \to B$.

Правила построения обратных высказываний.



Диагональные стрелки на рис. показывают одновременную истинность (т. е. эквиваленцию) соответствующих высказываний.

Равенство $A \to B = \overline{B} \to \overline{A}$ называется правилом **контрапозиции** (от лат. contrapositio — противопоставление).

Существуют такие высказывания, для которых одновременно справедливы и прямая, и обратная импликации: т. е. $A \to B$ и $B \to A$. Такие логические операции называются эквиваленцией. Покажем, что это определение не противоречит определению эквиваленции, данному ранее. На языке логических операций это можно записать так:

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \cdot (B \to A)$$

Справедливость этой формулы видна из таблицы истинности:

Таблица истинности для эквиваленции

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \cdot (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Самостоятельно рассмотрите пример.

Даны высказывания:

А: «Сумма цифр целого числа в десятичной записи делится на 3»;

В: «Число делится на 3».

Сформулировав высказывания ***А*** $\to$ ***В***, ***В***→***А***, $\overline{A} \to \overline{B}$, $\overline{B} \to \overline{A}$ и определив их истинность, самостоятельно убедитесь, что обратные импликации тождественны.

Таблица истинности операций (итоговая)

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(\neg P)$	$\lambda(P \wedge Q)$	$\lambda(P \vee Q)$	$\lambda(P \to Q)$	$\lambda(P \leftrightarrow Q)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Закрепление узученного материала

Упражнение 1. Какие из предложений являются высказываниями? Какие из высказываний истинные, какие ложные?

1) Москва – столица России
2) Студент механико-математического университета
3) Треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$
4) Луна есть спутник Марса
5) $2 + 2 = 5$
6) Кислород – газ
7) Каша – вкусное блюдо
8) Математика – интересный предмет
9) Картины Пикассо слишком абстракты
10) Железо тяжелее свинца
11) «Да здравствуют музы!»
12) Треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны
13) Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний
14) Сегодня плохая погода
15) В романе А.С. Пушкина «Евгений Онегин» 136 245 букв
16) Река Ангара впадает в озеро Байкал

Упражнение 2. Сформулируйте отрицания следующих высказываний; укажите значения истинности данных высказываний и их отрицаний:

1) Волга впадает в Каспийское море.
2) Число 28 не делится на число 7.
3) $6 > 3$.
4) $4 \leq 5$.
5) Все простые числа нечетны.
6) Число $\sqrt{2}$ - рациональное.
7) $5 + 3 = 8$.
8) Африка – остров.
9) Все слова можно разделить на слоги.
10) Некоторые грибы несъедобны.

Упражнение 3. Установите, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга и какие нет (почему):

а) «$4 < 5$», «$5 < 4$»;
б) «$6 < 9$», «$6 \geqslant 9$»;
в) «Треугольник ABC прямоугольный», «Треугольник ABC тупоугольный»;
г) «Натуральное число n четно», «Натуральное число n нечетно»;
д) «Функция f нечетна», «Функция f четна»;
е) «Все простые числа нечетны», «Все простые числа четны»;
ж) «Все простые числа нечетны», «Существует простое четное число»;
з) «Человеку известны все виды животных, обитающих на Земле», «На Земле существует вид животных, неизвестный человеку»;
и) «Существуют иррациональные числа», «Все числа — рациональные»;
к) «Если n делится на 3, то n делится на 9», «Если n не делится на 3, то n не делится на 9»;
л) «$2 < 0$», «$2 > 0$».

Упражнение 4. Пусть даны высказывания:

A – «Этот параллелограмм – прямоугольник»

B – «Этот параллелограмм – квадрат».

Прочитайте высказывания:

$1)\ A \to B$

$2)\ B \to A$

$3)\ \bar{A} \to \bar{B}$

$4)\ \bar{B} \to \bar{A}$

$5)\ (\bar{A} \vee \bar{B}) \to \overline{A \wedge B}$

и, если возможно, определите его семантическую характеристику.

Решение Упражнения 4.

A – «Этот параллелограмм – прямоугольник»

B – «Этот параллелограмм – квадрат».

1) Высказывание $A \to B$: *«Если этот параллелограмм – прямоугольник, то он и квадрат»* – *ложное.*
2) Высказывание $B \to A$: *«Если этот параллелограмм – квадрат, то он и прямоугольник»* - *истинное.*
3) Высказывание $\bar{A} \to \bar{B}$: *«Если этот параллелограмм – не прямоугольник, то неверно, что он квадрат»* - *истинное.*
4) Высказывание $\bar{B} \to \bar{A}$: *«Если этот параллелограмм – не квадрат, то неверно, что он прямоугольник»* - *ложное.*
5) Высказывание $(\bar{A} \vee \bar{B}) \to \overline{A \wedge B}$: *«Если этот параллелограмм – или не прямоугольник, или не квадрат, то неверно, что он и прямоугольник и квадрат»* - *истинное.*